Multivariate Meixner, Charlier and Krawtchouk polynomials (New Developments of Representation Theory and Harmonic Analysis)

渋川, 元樹

数理解析研究所講究録
第 1925 巻 2014 年 128-147

Multivariate Meixner, Charlier and Krawtchouk polynomials

九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所 渋川元樹
Genki Shibukawa*
Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University

概 要

多変数の Meixner, Charlier, Krawtchouk 多項式を導入し, 対称錐上の調和解析を用いて, それらの基本的性質を導出する. その中で特に一変数の場合においても知られていなかった, 母函数を用いた Meixner 多項式と Laguerre 多項式の対応を与える.

1 Introduction –一変数–

一変数の離散型直交多項式である Meixner, Charlier, Krawtchouk 多項式は次のように定義される ([KLS] 参照).

$$
\begin{aligned}
M_m(x;\alpha,c) &:= {}_2F_1\left(\begin{matrix}-m,-x\\ \alpha\end{matrix};1-\frac{1}{c}\right)=\sum_{k=0}^{m}\frac{k!}{(\alpha)_k}\binom{m}{k}\binom{x}{k}\left(1-\frac{1}{c}\right)^k,\\
C_m(x;a) &:= {}_2F_0\left(\begin{matrix}-m,-x\\ -\end{matrix};-\frac{1}{a}\right)=\sum_{k=0}^{m}k!\binom{m}{k}\binom{x}{k}\left(-\frac{1}{a}\right)^k,\\
K_m(x;p,N) &:= {}_2F_1\left(\begin{matrix}-m,-x\\ -N\end{matrix};\frac{1}{p}\right)=\sum_{k=0}^{m}\frac{k!}{(-N)_k}\binom{m}{k}\binom{x}{k}\left(\frac{1}{p}\right)^k.
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\binom{m}{k} &:= \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!},\\
(\alpha)_k &:= \begin{cases}1 & (k=0)\\ \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1) & (otherwise)\end{cases}.
\end{aligned}
$$

*g-shibukawa@math.kyushu-u.ac.jp

まず定義から直ちに, 変数と添え数の入れ替えの対称性 (双対性)

$$M_m(x;\alpha,c) = M_x(m;\alpha,c),$$
$$C_m(x;a) = C_x(m;a),$$
$$K_m(x;p,N) = K_x(m;p,N).$$

と退化極限

$$\lim_{\alpha\to\infty} M_m\left(x;\alpha,\frac{a}{a+\alpha}\right) = C_m(x;a),$$
$$\lim_{N\to\infty} K_m\left(x;\frac{a}{N},N\right) = C_m(x;a),$$
$$M_m\left(x;-N,\frac{p}{p-1}\right) = K_m(x;p,N).$$

がわかる. 特に退化極限より, Charlier, Krawtchouk 多項式の性質は Meixner 多項式の性質に帰着されるので, 以下では Meixner 多項式を中心に話をする[1].

Meixner 多項式の基本的な性質として次の母函数, 直交関係式, 差分関係式[2]がある.

<u>母函数</u>

$$(1-z)^{-\alpha}\left(\frac{1-\frac{1}{c}z}{1-z}\right)^x = \sum_{m\geq 0}\frac{(\alpha)_m}{m!}M_m(x;\alpha,c)z^m.$$

<u>直交関係式</u> $\alpha>0, 1>c>0$ について

$$\sum_{x\geq 0}\frac{(\alpha)_x}{x!}c^x M_m(x;\alpha,c)M_n(x;\alpha,c) = \frac{c^{-m}}{(1-c)^\alpha}\frac{m!}{(\alpha)_m}\delta_{m,n}\geq 0.$$

<u>差分方程式</u>

$$\begin{aligned}(c-1)mM_m(x;\alpha,c) &= c(x+\alpha)M_m(x+1;\alpha,c)\\ &\quad -(x+(x+\alpha)c)M_m(x;\alpha,c)\\ &\quad +xM_m(x-1;\alpha,c).\end{aligned}$$

これらの基本的性質, 例えば直交関係式, の証明は, Meixner 多項式が (Sturm-Liouville 型の) 差分方程式を満たすことを用いるものや, Gauss の超幾何函数の積和公式

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0}\frac{(\alpha)_k}{k!}{}_2F_1\left(\begin{matrix}-m,\beta\\ \alpha\end{matrix};x\right){}_2F_1\left(\begin{matrix}-m,\gamma\\ \alpha\end{matrix};y\right)z^k &= (1-z)^{-\alpha+\beta+\gamma}(1-z+xz)^{-\beta}(1-z+yz)^{-\gamma}\\ &\quad\cdot{}_2F_1\left(\begin{matrix}\beta,\gamma\\ \alpha\end{matrix};\frac{xyz}{(1-z+xz)(1-z+yz)}\right)\end{aligned}$$

---

[1]実は Krawtchouk 多項式の直交関係式は Meixner 多項式の直交関係式から直接には導出できない. しかし本稿のユニタリ picture と Meixner 多項式の "母函数の母函数" を用いる方法を用いると, Meixner 多項式の結果から Krawtchouk 多項式の直交性を導出できる.

[2]Meixner, Charlier, Krawtchouk 多項式は双対性があるので差分関係式は隣接関係式と同値になる.

を用いるもの等の様々な証明が知られているが, ここでは [Sh] に従っていくつかのユニタリ空間とそれらの間のユニタリ同型 (ユニタリ picture) を用いる方法を紹介しよう.

$\alpha > 1$, $D := \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$, $T := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z > 0\}$, m は $\mathbb{C}$ の Lebesgue 測度としよう. 以下のような函数空間とその直交基底を導入する.

(1) $\psi_m^{(\alpha)}$; Laguerre 多項式 ($\times$ 指数函数)

$$L^2_\alpha(\mathbb{R}_{>0}) := \{\psi : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \|\psi\|^2_{\alpha,\mathbb{R}_{>0}} < \infty\},$$
$$\|\psi\|^2_{\alpha,\mathbb{R}_{>0}} := \frac{2^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty |\psi(u)|^2 u^{\alpha-1}\, du,$$
$$\psi_m^{(\alpha)}(u) := e^{-u} L_m^{(\alpha-1)}(2u) = \frac{(\alpha)_m}{m!} e^{-u} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \frac{1}{(\alpha)_k} (2u)^k.$$

(2) $F_m^{(\alpha)}$; ベキ多項式の Cayley 変換

$$\mathcal{H}^2_\alpha(T) := \{F : T \longrightarrow \mathbb{C} \mid F \text{ は } T \text{ 上で正則かつ } \|F\|^2_{\alpha,T} < \infty\},$$
$$\|F\|^2_{\alpha,T} := \frac{\alpha-1}{4\pi} \int_T |F(z)|^2 x^{\alpha-2}\, m(dz),$$
$$F_m^{(\alpha)}(z) := \frac{(\alpha)_m}{m!} \left(\frac{1+z}{2}\right)^{-\alpha} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^m.$$

(3) $f_m^{(\alpha)}$; ベキ多項式

$$\mathcal{H}^2_\alpha(D) := \{f : D \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ は } D \text{ 上で正則かつ } \|f\|^2_{\alpha,D} < \infty\},$$
$$\|f\|^2_{\alpha,D} := \frac{\alpha-1}{\pi} \int_D |f(w)|^2 (1-|w|^2)^{\alpha-2}\, m(dw),$$
$$f_m^{(\alpha)}(w) := \frac{(\alpha)_m}{m!} w^m.$$

各々の直交基底のノルムが

$$(\psi_m^{(\alpha)}, \psi_n^{(\alpha)})^2_{\alpha,\mathbb{R}_{>0}} = (F_m^{(\alpha)}, F_n^{(\alpha)})_{\alpha,T} = (f_m^{(\alpha)}, f_n^{(\alpha)})_{\alpha,D} = \frac{(\alpha)_m}{m!} \delta_{m,n}.$$

となることに注意しよう. これらの函数空間の間には, 以下のユニタリ同型が構成されている.

<u>変形 Laplace 変換</u>

$$\mathcal{L}_\alpha : L^2_\alpha(\mathbb{R}_{>0}) \overset{\simeq}{\to} \mathcal{H}^2_\alpha(T), \ \ (\mathcal{L}_\alpha \psi)(z) := \frac{2^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-zu} u^{\alpha-1} \psi(u)\, du.$$

<u>変形 Cayley 変換</u>

$$C_\alpha^{-1} : \mathcal{H}^2_\alpha(T) \overset{\simeq}{\to} \mathcal{H}^2_\alpha(D), \ \ (C_\alpha^{-1} F)(w) := (1-w)^{-\alpha} F\left(\frac{1+w}{1-w}\right).$$

まとめて, 以下のユニタリ picture を得る.

$$\begin{array}{ccccc} L^2_\alpha(\mathbb{R}_{>0}) & \xrightarrow[\mathcal{L}_\alpha]{\simeq} & \mathcal{H}^2_\alpha(T) & \xrightarrow[C_\alpha^{-1}]{\simeq} & \mathcal{H}^2_\alpha(D). \\ \Cup & & \Cup & & \Cup \\ \psi_m^{(\alpha)} & \longmapsto & F_m^{(\alpha)} & \longmapsto & f_m^{(\alpha)} \\ \mathbf{(1)} & & \mathbf{(2)} & & \mathbf{(3)} \end{array} \tag{1.1}$$

以上の picture は Laguerre 多項式を扱う自然な枠組みとして古典的に良く知られている. この picture と Meixner 多項式とを結びつける Key Lemma が次の公式である.

Lemma 1.1. 任意の複素数 α, 及び $u \in \mathbb{R}_{>0}, z \in D$ について,

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1+c}{1-c}u} \sum_{x\geq 0} \frac{1}{x!} \left(\frac{2c}{1-c}\right)^x \left\{ \sum_{m\geq 0} \frac{(\alpha)_m}{m!} M_m(x;\alpha,c) z^m \right\} u^x &= \sum_{m\geq 0} \psi_m^{(\alpha)}(u) z^m \\ &= (1-z)^{-\alpha} e^{-u\frac{1+z}{1-z}}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

すなわち Meixner 多項式の変数もまた離散変数であることに注意して, 変数について適当な重みを付けて更に和を走らせることで Meixner 多項式の "母函数の母函数" を考えると, これが Laguerre 多項式の母函数に一致するという公式である.

$$\text{i.e.} \quad (\text{Meixner の母函数の母函数}) = (\text{Laguerre の母函数}).$$

証明は任意の複素数 w と非負整数 k について成り立つ

$$e^w w^k = \sum_{x\geq 0} \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{x!} w^x$$

に注意すれば直ちに得られる.

この結果自身, 直交関係式が積分で定義される直交多項式系 (Laguerre 多項式) と離散和で定義される直交多項式 (Meixner 多項式) の「対応」を与えている点で興味深い. しかしより重要なのは, この公式と上記のユニタリ picture を併せることで以下のように Meixner 多項式の基本的性質が極めて見通し良く導出できる点である.

<u>母函数</u> (1.2) を変形した

$$\sum_{x\geq 0} \frac{1}{x!} \left(\frac{2c}{1-c}\right)^x \left\{ \sum_{m\geq 0} \frac{(\alpha)_m}{m!} M_m(x;\alpha,c) z^m \right\} u^x = (1-z)^{-\alpha} e^{\frac{2c}{1-c}\frac{1-\frac{1}{c}z}{1-z}u},$$

において, u の係数比較をすることで, Meixner 多項式の母函数

$$\sum_{m\geq 0} \frac{(\alpha)_m}{m!} M_m(x;\alpha,c) z^m = (1-z)^{-\alpha} \left(\frac{1-\frac{1}{c}z}{1-z}\right)^x$$

を得る.

ここで注意しておきたいのは,「Meixner 多項式の母函数」がわからなくても,「Meixner 多項式の母函数の母函数」の方が先に計算出来て, そこから「Meixner 多項式の母函数」を導出できる点である. 特に多変数化する際には, このことは重要になる.

直交関係式 ユニタリ picture

$$
\begin{array}{ccc}
L^2_\alpha(\mathbb{R}_{>0}) & \xrightarrow[C_\alpha^{-1}\circ\mathcal{L}_\alpha]{\simeq} & \mathcal{H}^2_\alpha(D) \\
\Cup & & \Cup \\
\sum_{m\geq 0}\psi_m^{(\alpha)}(u)z^m & \longmapsto & \sum_{m\geq 0} f_m^{(\alpha)}(w)z^m
\end{array}
$$

におけるユニタリ変換 $C_\alpha^{-1}\circ\mathcal{L}_\alpha$ を Key Lemma の公式 (1.2) に作用させると, 次が得られる.

$$
\begin{aligned}
(1-c)^\alpha \sum_{x\geq 0}\frac{(\alpha)_x}{x!}c^x\left\{\sum_{m\geq 0}\frac{(\alpha)_m}{m!}M_m(x;\alpha,c)z^m\right\}(1-cw)^{-\alpha}\left(\frac{1-w}{1-cw}\right)^x \\
= \sum_{m\geq 0}\frac{(\alpha)_m}{m!}w^m z^m = (1-wz)^{-\alpha}. \qquad (1.3)
\end{aligned}
$$

ここで (1.3) の最左辺に, 先程導出した Meixner 多項式の母函数が現れていることに注意しよう. そこで先程得られた Meixner 多項式の母函数を用いると, (1.3) は以下のように書ける.

$$
\begin{aligned}
\sum_{m,n\geq 0}(1-c)^\alpha\frac{(\alpha)_m}{m!}\frac{(\alpha)_n}{n!}c^n\left\{\sum_{x\geq 0}\frac{(\alpha)_x}{x!}c^x M_m(x;\alpha,c)M_n(x;\alpha,c)\right\}w^n z^m \\
= \sum_{m,n\geq 0}\frac{(\alpha)_m}{m!}w^n z^m\delta_{m,n}
\end{aligned}
$$

ここで w と z の係数を比較すれば[3], Meixner 多項式の直交関係式

$$
\sum_{x\geq 0}\frac{(\alpha)_x}{x!}c^x M_m(x;\alpha,c)M_n(x;\alpha,c) = \frac{c^{-m}}{(1-c)^\alpha}\frac{m!}{(\alpha)_m}\delta_{m,n}.
$$

が得られる[4].

差分方程式 Laguerre 多項式の微分方程式を思い出そう.

$$
D_\alpha^{(1)}\psi_m^{(\alpha)}(u) = 2m\psi_m^{(\alpha)}(u).
$$

但し, $D_\alpha^{(1)} = -u\partial_u^2 - \alpha\partial_u + u - \alpha$.

---

[3]厳密には絶対収束性の問題があるが, α と c を fix するごとにある $\epsilon > 0$ が存在して, $|z|, |w| < \epsilon$ なる z と w についてこの和は絶対収束することがわかる.

[4]ユニタリ picture においては $\alpha > 1$ であったが, 直交関係式の両辺は $\alpha > 0$ で成り立つ.

そこで $\frac{c-1}{2}e^{\frac{1+c}{1-c}u}D_\alpha^{(1)}$ を

$$\sum_{x\geq 0}\frac{1}{x!}\left(\frac{2c}{1-c}\right)^x\left\{\sum_{m\geq 0}\frac{(\alpha)_m}{m!}M_m(x;\alpha,c)z^m\right\}e^{-\frac{1+c}{1-c}u}u^x=\sum_{m\geq 0}\psi_m^{(\alpha)}(u)z^m$$

に作用させて, z と u に関する係数比較を行うと, 差分方程式

$$\begin{aligned}(c-1)mM_m(x;\alpha,c)&=c(x+\alpha)M_m(x+1;\alpha,c)\\&\quad-(x+(x+\alpha)c)M_m(x;\alpha,c)\\&\quad+xM_m(x-1;\alpha,c).\end{aligned}$$

を得る. ちなみに双対性よりこれは隣接関係式とも同値である.

このように Laguerre 多項式のユニタリ picture を, Lemma 1.1 による Meixner 多項式と Laguerre 多項式の「対応」で Meixner 多項式に読み替えることで母函数, 直交関係式, 差分方程式等の基本的性質が導出できた. この論法は一変数の場合においてさえこれまで知られていなかったようであるが, より重要なのはユニタリ picture と Lemma 1.1 は多変数化できるということである. そしてそれから多変数 Meixner 多項式を導入でき, 更にその基本的性質が一変数と全く parallel に導出できる. これが本稿の主題である.

2 多変数化

まず多変数化の準備として, Jordan 代数や対称錐の構造とその上の解析の, 必要最低限の定義と諸性質を述べる. 次いで多変数 Laguerre 多項式に関するユニタリ picture を導入して, 多変数 Meixner, Charleir, Krawtchouk 多項式について論じていく.

2.1 Analysis on symmetric cones

この節についての詳細は [FK] を参照にされたい.

V を $\dim_{\mathbb{R}} V=n, \mathrm{rank}\ V=r$, 重複度 d の単純 Euclidean Jordan 代数 (例えば実対称行列全体 $\mathrm{Sym}_r(\mathbb{R})$, もしくは複素 Hermite 行列全体 $\mathrm{Herm}_r(\mathbb{C})$ 等) としよう. 但し重複度 d については以下の制限がある.

$$d=\begin{cases}1,2,3,4,5,\dots & (r=2)\\ 1,2,4,8 & (r=3)\\ 1,2,4 & (r>3)\end{cases}. \tag{2.1}$$

更に Ω を既約対称錐

$$\Omega:=\{x^2\mid x\in V,\Delta(x)\,(=\det(x))\neq 0\}\quad(\text{e.g. }\ \mathrm{Sym}_r^{++}(\mathbb{R}),\ \mathrm{Herm}_r^{++}(\mathbb{C})),$$

V の複素化を $V^{\mathbb{C}} := V + iV$, $V^{\mathbb{C}}$ の Ω に付随した tube domain を $T_\Omega := \Omega + iV$, $V^{\mathbb{C}}$ の単位開球を $\mathcal{D}\,(= c^{-1}(T_\Omega))$ とする. また $G(\Omega)$, G, K をそれぞれ, Ω の線型自己同型群, $G(\Omega)$ の単位元の連結成分, V の単位元 e に関する isotropy 部分群, としよう.

次いでガンマ函数やベキ函数の多変数化を導入しよう. まず長さ r の分割の集合を

$$\mathscr{P} := \{\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_r) \in \mathbb{Z}^r \mid m_1 \geq \cdots \geq m_r \geq 0\}$$

とし以下特に断らない限り, $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_r), \mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r) \in \mathscr{P}$ とする. 多変数のガンマ函数を

$$\Gamma_\Omega(\mathbf{s}) := (2\pi)^{\frac{n-r}{2}} \prod_{j=1}^{r} \Gamma\left(s_j - \frac{d}{2}(j-1)\right), \quad (\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathbb{C}^r)$$

で定義し[5], 多変数の階乗ベキを

$$(\mathbf{s})_{\mathbf{m}} := \frac{\Gamma_\Omega(\mathbf{s}+\mathbf{m})}{\Gamma_\Omega(\mathbf{s})} = \prod_{j=1}^{r} \left(s_j - \frac{d}{2}(j-1)\right)_{m_j}$$

とする.

また $\Delta_1, \ldots, \Delta_r = \Delta(= \det)$ を V に付随した j 次主座小行列式,

$$\Delta_{\mathbf{m}}(x) := \Delta(x)^{m_r} \prod_{j=1}^{r-1} \Delta_j(x)^{m_j - m_{j+1}}.$$

とする時, (ベキ多項式の多変数類似にあたる)Ω 上の球多項式 $\Phi_{\mathbf{m}}^{(d)}$ を次で定める[6].

$$\Phi_{\mathbf{m}}^{(d)}(x) := \int_K \Delta_{\mathbf{m}}(kx)\, dk \qquad (\text{但し, } dk \text{ は } K \text{ 上の Haar 測度}).$$

球多項式 $\Phi_{\mathbf{m}}$ は, K 不変性と $x \in \Omega$ のスペクトル分解

$$x = k\sum_{j=1}^{r} \lambda_j c_j, \ (k \in K, \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}, c_1, \ldots, c_r; \text{Jordan frame}),$$

より, 次のような表示があることがわかる.

$$\Phi_{\mathbf{m}}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) := \Phi_{\mathbf{m}}\left(\sum_{j=1}^{r} \lambda_j c_j\right) (= \Phi_{\mathbf{m}}(x)).$$

更に r 変数の Jack 多項式 $P_{\mathbf{m}}^{(\frac{2}{d})}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ を用いれば,

$$\Phi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) = \frac{P_{\mathbf{m}}^{(\frac{2}{d})}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)}{P_{\mathbf{m}}^{(\frac{2}{d})}(1, \ldots, 1)}.$$

[5][FK] のオリジナルの定義は, Ω 上の積分を用いたものだが, 本稿では Concluding remarks の都合から Γ_Ω の一変数のガンマ函数による表示公式を定義とした.

[6]以下球多項式 $\Phi_{\mathbf{m}}^{(d)}$ の重複度 d をしばしば省略する.

と書ける. 特に $d=2$ とすると, これは良く知られた Schur 多項式を正規化した多項式になっている.

$$\Phi^{(2)}_{\mathbf{m}}(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)=\frac{s_{\mathbf{m}}(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)}{s_{\mathbf{m}}(1,\ldots,1)}=\frac{1!\cdots r!}{\prod_{p<q}(m_p-m_q+q-p)}s_{\mathbf{m}}(\lambda_1,\ldots,\lambda_r).$$

一般 (Jack) 二項係数 $\binom{\mathbf{m}}{\mathbf{k}}_{\frac{d}{2}}$ を,

$$\Phi^{(d)}_{\mathbf{m}}(e+x)=\sum_{|\mathbf{k}|\le|\mathbf{m}|}\binom{\mathbf{m}}{\mathbf{k}}_{\frac{d}{2}}\Phi^{(d)}_{\mathbf{k}}(x).$$

により定義する[7]. この一般二項係数に関しては次のようなことが知られている ([OO], [Sh]).

vanishing property

$$\mathbf{k}\not\subset\mathbf{m}\in\mathscr{P}\quad\Rightarrow\quad\binom{\mathbf{m}}{\mathbf{k}}=0.$$

なので特に上述の定義は

$$\Phi_{\mathbf{m}}(e+u)=\sum_{\mathbf{k}\subset\mathbf{m}}\binom{\mathbf{m}}{\mathbf{k}}\Phi_{\mathbf{k}}(u).$$

と書き直せる.

positivity 任意の $\mathbf{m},\mathbf{k}\in\mathscr{P}$ について

$$\binom{\mathbf{m}}{\mathbf{k}}\ge 0.$$

多変数の階乗ベキとの関係 一変数の時と同様に

$$(-1)^{|\mathbf{k}|}d_{\mathbf{k}}\frac{(-N)_{\mathbf{k}}}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{k}}}=\binom{N}{\mathbf{k}}\quad(N=(N,\ldots,N)),$$

が成り立つ. ここで $d_{\mathbf{k}}$ [8]は

$$d_{\mathbf{k}}:=\prod_{j=1}^{r}\frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}j\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}(j-1)+1\right)}\cdot\prod_{1\le p<q\le r}\left(k_p-k_q+\frac{d}{2}(q-p)\right)\frac{\Gamma\left(k_p-k_q+\frac{d}{2}(q-p+1)\right)}{\Gamma\left(k_p-k_q+\frac{d}{2}(q-p-1)+1\right)}.$$

しかし一般には

$$(-1)^{|\mathbf{k}|}d_{\mathbf{k}}\frac{(-\mathbf{m})_{\mathbf{k}}}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{k}}}\ne\binom{\mathbf{m}}{\mathbf{k}}.$$

[7]一般二項係数の重複度を $\frac{d}{2}$ と書いたのは [OO] の流儀に従った為である. なおこの $\frac{d}{2}$ も適宜省略する.

[8]通常は, V 上の多項式環 $\mathcal{P}(V)$ が G の作用で無重複に既約 G-加群 $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}$ に分解し, $d_{\mathbf{m}}:=\dim\mathcal{P}_{\mathbf{m}}$ により $d_{\mathbf{m}}$ を定義する. しかし本稿では $d_{\mathbf{m}}$ の明示的表示により $d_{\mathbf{m}}$ を定義する.

以上を整理して, 必要となる一変数から多変数への対応を述べると次の一覧のようになる[9].

$$
\begin{aligned}
\mathbb{R} &\Rightarrow V \quad (\text{e.g.}\, \mathrm{Sym}_r(\mathbb{R}),\ \mathrm{Herm}_r(\mathbb{C})),\\
\mathbb{R}_{>0} &\Rightarrow \Omega \quad (\text{e.g.}\, \mathrm{Sym}_r^{++}(\mathbb{R}),\ \mathrm{Herm}_r^{++}(\mathbb{C})),\\
\mathbb{C} &\Rightarrow V^{\mathbb{C}} := V + iV,\\
T\,;\text{右半平面} &\Rightarrow T_\Omega := \Omega + iV\,;\text{tube domain},\\
D\,;\text{単位円板} &\Rightarrow \mathcal{D} := c^{-1}(H_\Omega),\\
\Gamma(s) &\Rightarrow \Gamma_\Omega(\mathbf{s}),\\
(s)_m &\Rightarrow (\mathbf{s})_{\mathbf{m}},\\
\frac{1}{m!} &\Rightarrow d_{\mathbf{m}} \frac{1}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{m}}},\\
e^{-u} &\Rightarrow e^{-\operatorname{tr} u},\\
u^{\alpha-1} &\Rightarrow \Delta(u)^{\alpha-\frac{n}{r}},\\
u^m &\Rightarrow \Phi_{\mathbf{m}}(u),\\
(1+u)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} u^k &\Rightarrow \Phi_{\mathbf{m}}(e+u) = \sum_{\mathbf{k}\subset\mathbf{m}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{k}} \Phi_{\mathbf{k}}(u).
\end{aligned}
$$

この manual によれば, 例えば Laguerre 多項式

$$
L_m^{(\alpha-1)}(u) = \frac{(\alpha)_m}{m!} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \frac{1}{(\alpha)_k} u^k
$$

の多変数化は

$$
L_{\mathbf{m}}^{(\alpha-\frac{n}{r})}(u) := d_{\mathbf{m}} \frac{(\alpha)_{\mathbf{m}}}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{m}}} \sum_{\mathbf{k}\subset\mathbf{m}} (-1)^{|\mathbf{k}|} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{k}} \frac{1}{(\alpha)_{\mathbf{k}}} \Phi_{\mathbf{k}}(u) \quad (|\mathbf{k}| := k_1 + \cdots + k_r).
$$

のようになる.

次いでユニタリ picture の多変数化を与えよう. $\alpha > 2\frac{n}{r} - 1$ とする.

(1) $\psi_{\mathbf{m}}^{(\alpha)}$; 多変数 Laguerre 多項式 (× 指数函数)

$$
\begin{aligned}
L_\alpha^2(\Omega)^K &:= \{\psi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \mid \psi \text{は } K \text{ 不変かつ } \|\psi\|_{\alpha,\Omega}^2 < \infty\},\\
\|\psi\|_{\alpha,\Omega}^2 &:= \frac{2^{r\alpha}}{\Gamma_\Omega(\alpha)} \int_\Omega |\psi(u)|^2 \Delta(u)^{\alpha-\frac{n}{r}}\, du,\\
\psi_{\mathbf{m}}^{(\alpha)}(u) &:= e^{-\operatorname{tr} u} L_{\mathbf{m}}^{(\alpha-\frac{n}{r})}(2u).
\end{aligned}
$$

[9] $e^{-\operatorname{tr} u}$ の tr は Jordan 代数の構造に付随したトレースだが, $V = \mathrm{Sym}_r(\mathbb{R}), \mathrm{Herm}_r(\mathbb{C})$ の場合は通常の行列の意味でのトレースとなる.

ここで多変数の Laguerre 多項式の微分方程式にも注意しておこう.

$$D_\alpha^{(1)}\psi_{\mathbf{m}}^{(\alpha)}(u) = 2|\mathbf{m}|\psi_{\mathbf{m}}^{(\alpha)}(u),$$

但し,

$$D_\alpha^{(1)} := \mathrm{tr}\,(-u\nabla_u^2 - \alpha\nabla_u + u - \alpha e).$$

(2) $F_{\mathbf{m}}^{(\alpha)}$; 球多項式の Cayley 変換

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_\alpha^2(T_\Omega)^K &:= \{F : T_\Omega \longrightarrow \mathbb{C} \mid F \text{ は } T_\Omega \text{ 上で正則な } K\text{-不変函数で} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \|F\|_{\alpha,T_\Omega}^2 < \infty\}, \\
\|F\|_{\alpha,T_\Omega}^2 &:= \frac{1}{(4\pi)^n}\frac{\Gamma_\Omega(\alpha)}{\Gamma_\Omega\left(\alpha-\frac{n}{r}\right)}\int_{T_\Omega}|F(z)|^2\Delta(x)^{\alpha-\frac{2n}{r}}\,m(dz), \\
F_{\mathbf{m}}^{(\alpha)}(z) &:= d_{\mathbf{m}}\frac{(\alpha)_{\mathbf{m}}}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{m}}}\Delta\left(\frac{e+z}{2}\right)^{-\alpha}\Phi_{\mathbf{m}}((z-e)(z+e)^{-1}).
\end{aligned}$$

(3) $f_{\mathbf{m}}^{(\alpha)}$; 球多項式

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_\alpha^2(\mathcal{D})^K &:= \{f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ は } \mathcal{D} \text{ 上で正則かつ } K\text{-不変函数で} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \|f\|_{\alpha,\mathcal{D}}^2 < \infty\}, \\
\|f\|_{\alpha,\mathcal{D}}^2 &:= \frac{1}{\pi^n}\frac{\Gamma_\Omega(\alpha)}{\Gamma_\Omega\left(\alpha-\frac{n}{r}\right)}\int_{\mathcal{D}}|f(w)|^2 h(w)^{\alpha-\frac{2n}{r}}\,m(dw), \\
h(w) &:= \mathrm{Det}\,(I_{V^{\mathbb{C}}} - 2w\Box\overline{w} + P(w)P(\overline{w}))^{\frac{r}{2n}}, \\
f_{\mathbf{m}}^{(\alpha)}(w) &:= d_{\mathbf{m}}\frac{(\alpha)_{\mathbf{m}}}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{m}}}\Phi_{\mathbf{m}}(u).
\end{aligned}$$

ここで Det は $V^{\mathbb{C}}$ の $\mathbb{C}$-線型作用素の意味での行列式,

$$\begin{aligned}
L(w)z &:= wz, \\
w\Box z &:= L(wz) + [L(w), L(z)], \\
P(w) &:= P(w,w) = 2L(w)^2 - L(w^2).
\end{aligned}$$

これらの間のユニタリ同型写像は次で与えられる.

<u>変形 Laplace 変換</u>

$$\mathcal{L}_\alpha : L_\alpha^2(\Omega)^K \xrightarrow{\simeq} \mathcal{H}_\alpha^2(T_\Omega)^K,\ \ (\mathcal{L}_\alpha\psi)(z) := \frac{2^{r\alpha}}{\Gamma_\Omega(\alpha)}\int_\Omega e^{-(z|u)}\Delta(u)^{\alpha-\frac{n}{r}}\psi(u)\,du.$$

<u>変形 Cayley 変換</u>

$$C_\alpha^{-1} : \mathcal{H}_\alpha^2(T_\Omega)^K \xrightarrow{\simeq} \mathcal{H}_\alpha^2(\mathcal{D})^K,\ \ (C_\alpha^{-1}F)(w) := \Delta(e-w)^{-\alpha}F\left((e+w)(e-w)^{-1}\right).$$

以上をまとめて, 次のユニタリ picture を得る.

$$
\begin{array}{ccccc}
L^2_\alpha(\Omega)^K & \underset{\mathcal{L}_\alpha}{\xrightarrow{\simeq}} & \mathcal{H}^2_\alpha(T_\Omega)^K & \underset{C_\alpha^{-1}}{\xrightarrow{\simeq}} & \mathcal{H}^2_\alpha(\mathcal{D})^K. \\
\Cup & & \Cup & & \Cup \\
\psi^{(\alpha)}_{\mathbf{m}} & \longmapsto & F^{(\alpha)}_{\mathbf{m}} & \longmapsto & f^{(\alpha)}_{\mathbf{m}} \\
(\mathbf{1}) & & (\mathbf{2}) & & (\mathbf{3})
\end{array} \tag{2.2}
$$

$$
(\psi^{(\alpha)}_{\mathbf{m}}, \psi^{(\alpha)}_{\mathbf{n}})_{\alpha,\Omega} = (F^{(\alpha)}_{\mathbf{m}}, F^{(\alpha)}_{\mathbf{n}})_{\alpha,T_\Omega} = (f^{(\alpha)}_{\mathbf{m}}, f^{(\alpha)}_{\mathbf{n}})_{\alpha,\mathcal{D}} = d_{\mathbf{m}} \frac{(\alpha)_{\mathbf{m}}}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{m}}} \delta_{\mathbf{m},\mathbf{n}}.
$$

2.2 多変数 Meixner, Charlier, Krawchouk 多項式

この節では特に断りない限り

$$
\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathscr{P}, \alpha \in \mathbb{C}, 0 < c, p < 1, a > 0, N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.
$$

とする.

ここで本稿の主題である多変数 Meixner, Charlier, Krawchouk 多項式を導入しよう. 方針はとても単純で一変数の Meixner, Charlier, Krawchouk 多項式

$$
\begin{aligned}
M_m(x; \alpha, c) &:= \sum_{k=0}^{m} \frac{k!}{(\alpha)_k} \binom{m}{k} \binom{x}{k} \left(1 - \frac{1}{c}\right)^k, \\
C_m(x; a) &:= \sum_{k=0}^{m} k! \binom{m}{k} \binom{x}{k} \left(-\frac{1}{a}\right)^k, \\
K_m(x; p, N) &:= \sum_{k=0}^{m} \frac{k!}{(-N)_k} \binom{m}{k} \binom{x}{k} \left(\frac{1}{p}\right)^k \quad (m = 0, 1, \ldots, N),
\end{aligned}
$$

を先程の manual に従って次のように多変数化すればよい.

Definition 2.1.

$$
\begin{aligned}
M_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}; \alpha, c) &:= \sum_{\mathbf{k} \subset \mathbf{m}} \frac{1}{d_{\mathbf{k}}} \frac{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{k}}}{(\alpha)_{\mathbf{k}}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{k}} \binom{\mathbf{x}}{\mathbf{k}} \left(1 - \frac{1}{c}\right)^{|\mathbf{k}|}, \\
C_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}; a) &:= \sum_{\mathbf{k} \subset \mathbf{m}} \frac{1}{d_{\mathbf{k}}} \left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{k}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{k}} \binom{\mathbf{x}}{\mathbf{k}} \left(-\frac{1}{a}\right)^{|\mathbf{k}|}, \\
K_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}; p, N) &:= \sum_{\mathbf{k} \subset \mathbf{m}} \frac{1}{d_{\mathbf{k}}} \frac{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{k}}}{(-N)_{\mathbf{k}}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{k}} \binom{\mathbf{x}}{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{p}\right)^{|\mathbf{k}|} \quad (\mathbf{m} \subset N = (N, \ldots, N)).
\end{aligned}
$$

「こんなに単純で良いのか？」と思われるかもしれないが, 順次述べるようにこの多変数化は極めて良い多変数化であり, 双対性, 退化極限, 母函数, 直交関係式, 差分関係式, 隣接関係式, 行列式表示が成り立つことがわかる.

まず定義より, 双対性と退化極限は直ちに従う.

Proposition 2.2. (1)

$$M_{\mathbf{m}}(\mathbf{x};\alpha,c)=M_{\mathbf{x}}(\mathbf{m};\alpha,c).$$

(2)

$$C_{\mathbf{m}}(\mathbf{x};a)=C_{\mathbf{x}}(\mathbf{m};a).$$

(3)

$$K_{\mathbf{m}}(\mathbf{x};p,N)=K_{\mathbf{x}}(\mathbf{m};p,N).$$

Proposition 2.3. (1)

$$M_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{x};-N,\frac{p}{p-1}\right)=K_{\mathbf{m}}(\mathbf{x};p,N).$$

(2)

$$\lim_{\alpha\to\infty}M_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{x};\alpha,\frac{a}{a+\alpha}\right)=C_{\mathbf{m}}(\mathbf{x};a).$$

(3)

$$\lim_{N\to\infty}K_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{x};\frac{a}{N},N\right)=C_{\mathbf{m}}(\mathbf{x};a).$$

特に退化極限より, 多変数 Charlier, Krawtchouk 多項式の性質は多変数 Meixner 多項式の性質に帰着されるので, 以下では多変数 Meixner 多項式を中心に話をする.

さて一変数の時は, ユニタリ picture と

Meixner の "母函数の母函数" = Laguerre の母函数.

という Key Lemma であった. ユニタリ picture の多変数化を既に導入したので残るは "母函数の母函数" の多変数類似を構成することである. 結論を言えば, これも一変数の結果

$$\begin{aligned}e^{-\frac{1+c}{1-c}u}\sum_{x\geq 0}\frac{1}{x!}\left(\frac{2c}{1-c}\right)^{x}\left\{\sum_{m\geq 0}\frac{(\alpha)_m}{m!}M_m(x;\alpha,c)z^m\right\}u^x&=\sum_{m\geq 0}\psi_m^{(\alpha)}(u)z^m\\&=(1-z)^{-\alpha}e^{-u\frac{1+z}{1-z}}.\end{aligned}$$

を件の manual に従って置き換えた結果がそのまま成り立つ.

Theorem 2.4.

$$\begin{aligned}&\sum_{\mathbf{x}\in\mathscr{P}}d_{\mathbf{x}}\frac{1}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{x}}}\left(\frac{2c}{1-c}\right)^{|\mathbf{x}|}e^{-\frac{1+c}{1-c}\operatorname{tr}u}\left\{\sum_{\mathbf{m}\in\mathscr{P}}d_{\mathbf{m}}\frac{(\alpha)_{\mathbf{m}}}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{m}}}M_{\mathbf{m}}(\mathbf{x};\alpha,c)\Phi_{\mathbf{m}}(z)\right\}\Phi_{\mathbf{x}}(u)\\&=\sum_{\mathbf{m}\in\mathscr{P}}\psi_{\mathbf{m}}^{(\alpha)}(u)\Phi_{\mathbf{m}}(z)=\Delta(e-z)^{-\alpha}\int_K e^{-(ku|(e+z)(e-z)^{-1})}\,dk.\end{aligned}\tag{2.3}$$

この定理とユニタリ picture より, 多変数 Meixner, Charlier, Krawtchouk 多項式の基本的性質を, 一変数の時と全く parallel に導出できる.

<u>母函数</u>

$$\sum_{\mathbf{x}\in\mathscr{P}} d_{\mathbf{x}} \frac{1}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{x}}} \left(\frac{2c}{1-c}\right)^{|\mathbf{x}|} \left\{\sum_{\mathbf{m}\in\mathscr{P}} d_{\mathbf{m}} \frac{(\alpha)_{\mathbf{m}}}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{m}}} M_{\mathbf{m}}(\mathbf{x};\alpha,c)\Phi_{\mathbf{m}}(z)\right\} \Phi_{\mathbf{x}}(u)$$
$$= \Delta(e-z)^{-\alpha} \int_K e^{\left(ku\left|\frac{2c}{1-c}\left(e-\frac{1}{c}z\right)(e-z)^{-1}\right.\right)} dk,$$

において, $\Phi_{\mathbf{x}}(u)$ の係数比較をすることで, 多変数 Meixner 多項式の母函数を得る.

$$\Delta(e-z)^{-\alpha}\Phi_{\mathbf{x}}\left(\left(e-\frac{1}{c}z\right)(e-z)^{-1}\right) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathscr{P}} d_{\mathbf{n}} \frac{(\alpha)_{\mathbf{n}}}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{n}}} M_{\mathbf{n}}(\mathbf{x};\alpha,c)\Phi_{\mathbf{n}}(z).$$

ここで比較の為に, Charlier, Krawtchouk 多項式の母函数と併せて一変数の結果を再録する.

(1) $|z|<1, x\in\mathbb{Z}_{\geq 0}, \alpha\in\mathbb{C}, 0<c<1$ について,

$$(1-z)^{-\alpha}\left(\frac{1-\frac{1}{c}z}{1-z}\right)^x = \sum_{n\geq 0} \frac{(\alpha)_n}{n!} M_n(x;\alpha,c) z^n.$$

(2) $|z|<1, x\in\mathbb{Z}_{\geq 0}, a>0$ について,

$$e^z\left(1-\frac{1}{a}z\right)^x = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} C_n(x;a) z^n.$$

(3) $|z|<1, x\in\mathbb{Z}_{\geq 0}, 0<p<1$ について,

$$(1+z)^N\left(\frac{1-\frac{1-p}{p}z}{1+z}\right)^x = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} K_n(x;p,N) z^n.$$

そしてこの多変数化は件の manual 通りの結果となっている.

Theorem 2.5 (母函数). (1) $z\in\mathcal{D}, \mathbf{x}\in\mathscr{P}, \alpha\in\mathbb{C}, 0<c<1$ について,

$$\Delta(e-z)^{-\alpha}\Phi_{\mathbf{x}}\left(\left(e-\frac{1}{c}z\right)(e-z)^{-1}\right) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathscr{P}} d_{\mathbf{n}} \frac{(\alpha)_{\mathbf{n}}}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{n}}} M_{\mathbf{n}}(\mathbf{x};\alpha,c)\Phi_{\mathbf{n}}(z).$$

(2) $z\in\mathcal{D}, \mathbf{x}\in\mathscr{P}, a>0$ について,

$$e^{\operatorname{tr} z}\Phi_{\mathbf{x}}\left(e-\frac{1}{a}z\right) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathscr{P}} d_{\mathbf{n}} \frac{1}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{n}}} C_{\mathbf{n}}(\mathbf{x};a)\Phi_{\mathbf{n}}(z).$$

(3) $z\in\mathcal{D}, \mathbf{x}\in\mathscr{P}, 0<p<1$ について,

$$\Delta(e+z)^N\Phi_{\mathbf{x}}\left(\left(e-\frac{1-p}{p}z\right)(e+z)^{-1}\right) = \sum_{\mathbf{n}\subset N} \binom{N}{\mathbf{n}} K_{\mathbf{n}}(\mathbf{x};p,N)\Phi_{\mathbf{n}}(z).$$

直交関係式

ユニタリ picture

$$\begin{array}{ccc} L^2_\alpha(\Omega)^K & \xrightarrow[C_\alpha^{-1}\circ\mathcal{L}_\alpha]{\simeq} & \mathcal{H}^2_\alpha(\mathcal{D})^K \\ \Uplus & & \Uplus \\ \sum_{\mathbf{m}\in\mathscr{P}} \psi^{(\alpha)}_{\mathbf{m}}(u)\Phi_{\mathbf{m}}(z) & \longmapsto & \sum_{\mathbf{m}\in\mathscr{P}} f^{(\alpha)}_{\mathbf{m}}(w)\Phi_{\mathbf{m}}(z) \end{array}$$

におけるユニタリ変換 $C_\alpha^{-1}\circ\mathcal{L}_\alpha$ を Key Lemma の公式 (2.3) に作用させると, 次が得られる.

$$\begin{aligned} &(1-c)^{r\alpha}\sum_{\mathbf{x},\mathbf{m}\in\mathscr{P}} d_{\mathbf{m}}\frac{(\alpha)_{\mathbf{m}}}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{m}}}M_{\mathbf{m}}(\mathbf{x};\alpha,c)\Phi_{\mathbf{m}}(z)\\ &\cdot d_{\mathbf{x}}\frac{(\alpha)_{\mathbf{x}}}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{x}}}c^{|\mathbf{x}|}\Delta(e-cw)^{-\alpha}\Phi_{\mathbf{x}}((e-w)(e-cw)^{-1})\\ &=\sum_{\mathbf{m}\in\mathscr{P}} d_{\mathbf{m}}\frac{(\alpha)_{\mathbf{m}}}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{m}}}\Phi_{\mathbf{m}}(w)\Phi_{\mathbf{m}}(z)=\Delta(z)^{-\alpha}\int_K\Delta(kz^{-1}-w)^{-\alpha}\,dk. \end{aligned}\tag{2.4}$$

ここで (2.4) の最左辺に多変数 Meixner 多項式の母函数が現れていることに注意しよう. そこで先程得られた多変数 Meixner 多項式の母函数を用いると, (2.4) は以下のように書ける.

$$\begin{aligned} &\sum_{\mathbf{m},\mathbf{n}\in\mathscr{P}}(1-c)^{r\alpha}d_{\mathbf{m}}\frac{(\alpha)_{\mathbf{m}}}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{m}}}d_{\mathbf{n}}\frac{(\alpha)_{\mathbf{n}}}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{n}}}c^{|\mathbf{n}|}\left\{\sum_{\mathbf{x}\in\mathscr{P}}d_{\mathbf{x}}\frac{(\alpha)_{\mathbf{x}}}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{x}}}c^{|\mathbf{x}|}M_{\mathbf{m}}(\mathbf{x};\alpha,c)M_{\mathbf{n}}(\mathbf{x};\alpha,c)\right\}\\ &\cdot\Phi_{\mathbf{n}}(w)\Phi_{\mathbf{m}}(z)=\sum_{\mathbf{m},\mathbf{n}\in\mathscr{P}}d_{\mathbf{m}}\frac{(\alpha)_{\mathbf{m}}}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{m}}}\Phi_{\mathbf{n}}(w)\Phi_{\mathbf{m}}(z)\delta_{\mathbf{m},\mathbf{n}} \end{aligned}$$

ここで $\Phi_{\mathbf{n}}(w)$ と $\Phi_{\mathbf{m}}(z)$ の係数を比較すれば, 多変数 Meixner 多項式の直交関係式

$$\sum_{\mathbf{x}\in\mathscr{P}}d_{\mathbf{x}}\frac{(\alpha)_{\mathbf{x}}}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{x}}}c^{|\mathbf{x}|}M_{\mathbf{m}}(\mathbf{x};\alpha,c)M_{\mathbf{n}}(\mathbf{x};\alpha,c)=\frac{c^{-|\mathbf{m}|}}{(1-c)^{r\alpha}}\frac{1}{d_{\mathbf{m}}}\frac{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{m}}}{(\alpha)_{\mathbf{m}}}\delta_{\mathbf{m},\mathbf{n}}.$$

が得られる.

ここでも比較の為に, Charlier, Krawtchouk 多項式の直交関係式と併せて一変数の結果を再録しよう.

(1) $\alpha>0, 0<c<1$ について,

$$\sum_{x\geq 0}\frac{(\alpha)_x}{x!}c^xM_m(x;\alpha,c)M_n(x;\alpha,c)=\frac{c^{-m}}{(1-c)^{\alpha}}\frac{m!}{(\alpha)_m}\delta_{m,n}\geq 0.$$

(2) $a>0$ について,

$$\sum_{x\geq 0}\frac{a^x}{x!}C_m(x;a)C_n(x;a)=a^{-m}e^am!\delta_{m,n}\geq 0.$$

(3) $0<p<1$ について,

$$\sum_{x=0}^{N}\binom{N}{x}p^x(1-p)^{N-x}K_m(x;p,N)K_n(x;p,N)=\left(\frac{1-p}{p}\right)^m\binom{N}{m}^{-1}\delta_{m,n}\geq 0.$$

この多変数化も以下のようにやはり件の manual 通りの多変数化となっている.

Theorem 2.6 (直交関係式). (1) $\alpha>\frac{n}{r}-1, 0<c<1$ について,

$$\sum_{\mathbf{x}\in\mathscr{P}}d_{\mathbf{x}}\frac{(\alpha)_{\mathbf{x}}}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{x}}}c^{|\mathbf{x}|}M_{\mathbf{m}}(\mathbf{x};\alpha,c)M_{\mathbf{n}}(\mathbf{x};\alpha,c)=\frac{c^{-|\mathbf{m}|}}{(1-c)^{r\alpha}}\frac{1}{d_{\mathbf{m}}}\frac{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{m}}}{(\alpha)_{\mathbf{m}}}\delta_{\mathbf{m},\mathbf{n}}\geq 0.$$

(2) $a>0$ について,

$$\sum_{\mathbf{x}\in\mathscr{P}}d_{\mathbf{x}}\frac{a^{|\mathbf{x}|}}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{x}}}C_{\mathbf{m}}(\mathbf{x};a)C_{\mathbf{n}}(\mathbf{x};a)=a^{-|\mathbf{m}|}e^{ra}\frac{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{m}}}{d_{\mathbf{m}}}\delta_{\mathbf{m},\mathbf{n}}\geq 0.$$

(3) $0<p<1$ について,

$$\sum_{\mathbf{x}\subset N}\binom{N}{\mathbf{x}}p^{|\mathbf{x}|}(1-p)^{rN-|\mathbf{x}|}K_{\mathbf{m}}(\mathbf{x};p,N)K_{\mathbf{n}}(\mathbf{x};p,N)=\left(\frac{1-p}{p}\right)^{|\mathbf{m}|}\binom{N}{\mathbf{m}}^{-1}\delta_{\mathbf{m},\mathbf{n}}\geq 0.$$

差分関係式 多変数 Laguerre 多項式の微分方程式を思い出そう.

$$D_\alpha^{(1)}\psi_{\mathbf{m}}^{(\alpha)}(u)=2|\mathbf{m}|\psi_{\mathbf{m}}^{(\alpha)}(u).$$

但し, $D_\alpha^{(1)}:=\mathrm{tr}\,(-u\nabla_u^2-\alpha\nabla_u+u-\alpha e)$ である. そこで $\frac{c-1}{2}e^{\frac{1+c}{1-c}\mathrm{tr}\,u}D_\alpha^{(1)}$ を

$$\begin{aligned}&\sum_{\mathbf{x}\in\mathscr{P}}d_{\mathbf{x}}\frac{1}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{x}}}\left(\frac{2c}{1-c}\right)^{|\mathbf{x}|}\left\{\sum_{\mathbf{m}\in\mathscr{P}}d_{\mathbf{m}}\frac{(\alpha)_{\mathbf{m}}}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{m}}}M_{\mathbf{m}}(\mathbf{x};\alpha,c)\Phi_{\mathbf{m}}(z)\right\}e^{-\frac{1+c}{1-c}\mathrm{tr}\,u}\Phi_{\mathbf{x}}(u)\\&\quad=\sum_{\mathbf{m}\in\mathscr{P}}\psi_{\mathbf{m}}^{(\alpha)}(u)\Phi_{\mathbf{m}}(z).\end{aligned}$$

に作用させて, $\Phi_{\mathbf{m}}(z)$ と $\Phi_{\mathbf{x}}(u)$ に関する係数比較を行うと, 多変数 Meixner 多項式の差分方程式を得る. ちなみに双対性よりこれは隣接関係式とも同値である.

この多変数化は, 上述した母函数や直交関係式程は単純でなく, もう少し複雑なものになる.

Theorem 2.7 (差分方程式). $\mathbf{x},\mathbf{m}\in\mathscr{P},\alpha\in\mathbb{C},c\in\mathbb{C}^*$ について,

$$\begin{aligned}&d_{\mathbf{x}}(c-1)|\mathbf{m}|M_{\mathbf{m}}(\mathbf{x};\alpha,c)\\&=\sum_{j=1}^{r}d_{\mathbf{x}+\epsilon_j}\tilde{a}_j(-\mathbf{x}-\epsilon_j)\left(x_j+\alpha-\frac{d}{2}(j-1)\right)cM_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}+\epsilon_j;\alpha,c)\\&\quad-\sum_{j=1}^{r}d_{\mathbf{x}}(x_j+(x_j+\alpha)c)M_{\mathbf{m}}(\mathbf{x};\alpha,c)\\&\quad+\sum_{j=1}^{r}d_{\mathbf{x}-\epsilon_j}\tilde{a}_j(\mathbf{x}-\epsilon_j)\left(x_j+\frac{d}{2}(r-j)\right)M_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}-\epsilon_j;\alpha,c).\end{aligned}$$

但し,

$$\epsilon_j = (0, \ldots, 0, \overset{\overset{j}{\vee}}{1}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}^r,$$

$$\tilde{a_j}(\mathbf{x}) := \prod_{k \neq j} \frac{x_j - x_k - \frac{d}{2}(j-k-1)}{x_j - x_k - \frac{d}{2}(j-k)},$$

とする.

行列式表示 ここでは $d=2$ とする. この時 $\frac{n}{r} = r$ であり, 球多項式 $\Phi_{\mathbf{m}}$ は Schur 多項式 $s_{\mathbf{m}}$(を正規化したもの) に退化する. この場合には多変数 Meixner 多項式は, 母函数, 直交関係式, 差分方程式に加えて次のような行列式表示を持つ.

Theorem 2.8 (行列式表示)**.** 任意の $\mathbf{m}, \mathbf{x} \in \mathscr{P}$ について,

$$M_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}; \alpha, c) = \frac{\left(1 - \frac{1}{c}\right)^{-\frac{r(r-1)}{2}}}{s_{\mathbf{m}}(1, \ldots, 1) s_{\mathbf{x}}(1, \ldots, 1)} \prod_{j=1}^{r} \frac{(\alpha - r + 1)_{j-1}}{(j-1)!}$$
$$\cdot \det \left(M_{m_\mu + r - \mu}(x_\nu + r - \nu; \alpha - r + 1, c)\right)_{1 \leq \mu, \nu \leq r}.$$

ここで $M_{m_\mu + r - \mu}(x_\nu + r - \nu; \alpha - r + 1, c)$ は一変数の *Meixner* 多項式である.

つまり一変数の Meixner 多項式を Jacobi-Trudi 的に「編み上げる」ことで, 多変数 Meixner 多項式が得られるのである. 証明には多変数 Meixner 多項式の母函数と次の Lemma を用いればよい.

Lemma 2.9 ([H] Theorem 1.2.1)**.** r 個の級数

$$f_\mu(z) = \sum_{m \geq 0} A_m^{(\mu)} z^m \quad (\mu = 1, \cdots, r).$$

を考え, この係数を用いて

$$A_{\mathbf{m}} := \det\ (A^{(\nu)}_{m_\mu + r - \mu})$$

とおく. この時,

$$\frac{\det\ (f_\mu(z_\nu))}{V(z_1, \ldots, z_r)} = \sum_{\mathbf{m} \in \mathscr{P}} A_{\mathbf{m}} s_{\mathbf{m}}(z_1, \ldots, z_r),$$

ここで $V(z_1, \ldots, z_r)$ は *Vandermonde* 行列式

$$V(z_1, \ldots, z_r) := \prod_{1 \leq \mu < \nu \leq r} (z_\mu - z_\nu).$$

Remark 2.10. 実は Meixner 多項式他のは, 今回の一般二項係数を用いた我々の多変数化とは別の多変数化が, 1970 年代に Griffiths により与えられている [Gr1], [Gr2]. これは Aomoto-Gelfand 型の超幾何函数による表示が知られており, 我々の多変数化と同様に母函数, 直交性, 差分方程式等の基本的諸性質が成り立つ良い多変数化であることが知られている. この多変数化と今回の我々の多変数化との関連はまだよくわからないが, 例えば二変数ぐらいで素朴に定義式, 母函数, 直交性, 差分方程式等を比較してみると, 本質的に別物になっていることがわかる.

3 Concluding remarks

本稿では多変数 Meixner, Charlier, Krawtchouk 多項式を導入し, その基本的性質を明らかにしたが, これらに関連した今後の課題が数多く残されている. 最後にそのいくつかを述べよう.

3.1 重複度 $d > 0$ に関する一般化

本稿で述べた諸結果は, 対称錐上の解析を用いた為に, 特に重複度 d に対して (2.1) のような制約が存在した. しかしよくよく見返してみると, 証明を除けば, 定義も主張も実はJordan 代数や対称錐の構造定理, あるいはその上の解析を使わずに定式化可能である[10]. 実際, $n := r + \frac{d}{2}r(r-1), d > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
d_{\mathbf{m}} &:= \prod_{j=1}^{r} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}j\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}(j-1)+1\right)} \\
&\quad \cdot \prod_{1 \le p < q \le r} \left(m_p - m_q + \frac{d}{2}(q-p)\right) \frac{\Gamma\left(m_p - m_q + \frac{d}{2}(q-p+1)\right)}{\Gamma\left(m_p - m_q + \frac{d}{2}(q-p-1)+1\right)}, \\
\Gamma_\Omega(\mathbf{s}) &:= (2\pi)^{\frac{n-r}{2}} \prod_{j=1}^{r} \Gamma\left(s_j - \frac{d}{2}(j-1)\right), \\
(\mathbf{s})_{\mathbf{k}} &:= \prod_{j=1}^{r} \left(s_j - \frac{d}{2}(j-1)\right)_{k_j}
\end{aligned}$$

とする. 更に r 変数の Jack 多項式 $P_{\mathbf{k}}^{(\frac{2}{d})}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ を用いて

$$\Phi_{\mathbf{k}}^{(d)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) := \frac{P_{\mathbf{k}}^{(\frac{2}{d})}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)}{P_{\mathbf{k}}^{(\frac{2}{d})}(1, \ldots, 1)}.$$

とし, 一般 (Jack) 二項係数を

$$\Phi_{\mathbf{m}}^{(d)}(1+\lambda_1, \ldots, 1+\lambda_r) = \sum_{\mathbf{k} \subset \mathbf{m}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{k}}_{\frac{d}{2}} \Phi_{\mathbf{k}}^{(d)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r).$$

と定める. これだけ準備できれば一般化された多変数 Meixner, Charlier, Krawtchouk 多項式を次で定めることが出来る.

---

[10] というより本稿ではそうなるように, 予め対称錐上の解析を用いない形で必要となる諸定義を行ったのである.

Definition 3.1.

$$M_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{x};\alpha,c) := \sum_{\mathbf{k}\subset\mathbf{m}} \frac{1}{d_{\mathbf{k}}} \frac{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{k}}}{(\alpha)_{\mathbf{k}}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{k}}_{\frac{d}{2}} \binom{\mathbf{x}}{\mathbf{k}}_{\frac{d}{2}} \left(1-\frac{1}{c}\right)^{|\mathbf{k}|},$$

$$C_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{x};a) := \sum_{\mathbf{k}\subset\mathbf{m}} \frac{1}{d_{\mathbf{k}}} \left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{k}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{k}}_{\frac{d}{2}} \binom{\mathbf{x}}{\mathbf{k}}_{\frac{d}{2}} \left(-\frac{1}{a}\right)^{|\mathbf{k}|},$$

$$K_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{x};p,N) := \sum_{\mathbf{k}\subset\mathbf{m}} \frac{1}{d_{\mathbf{k}}} \frac{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{k}}}{(-N)_{\mathbf{k}}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{k}}_{\frac{d}{2}} \binom{\mathbf{x}}{\mathbf{k}}_{\frac{d}{2}} \left(\frac{1}{p}\right)^{|\mathbf{k}|}.$$

定義より, 双対性と退化極限は一般化された多変数 Meixner, Charlier, Krawtchouk 多項式についても成り立つことは直ちにわかる. そこで次のような予想は自然であろう.

Conjecture 3.2. 一般化された多変数 *Meixner, Charlier, Krawtchouk* 多項式について, *Theorems 2.5, 2.6, 2.7* で述べたような母函数, 直交関係式, 差分関係式が成立する.
ここで $\Delta(e-z) = (1-z_1)\cdots(1-z_r)$ とみなす.

既約対称錐の分類より

$$d = 1,2,4 \quad \text{or} \quad r=2, d\in\mathbb{Z}_{>0} \quad \text{or} \quad r=3, d=8$$

に関して予想が成り立つことがわかる, というのが本稿で述べた主結果であった.

ところが一般の $d>0$ の場合には対称錐上の解析が使えず, 特に今回用いたようなユニタリ picture(幾何構造) が存在しない. そこで対称錐上の解析とは本質的に異なる手法による別証明が必要になると考えられる. 一方で多変数 Laguerre 多項式に関しては, 対称錐上の解析とは異なる, 量子可積分系 (またそれに関連した代数的手法) による扱いが知られており [BF], それにより $d>0$ の場合への拡張も知られている. そこで一般化された多変数 Meixner 多項式の "母函数の母函数" を $d>0$ の場合に拡張し, それを用いて一般化された多変数 Laguerre 多項式の結果を読み替えることで上記の Conjecture が示せるのではないかという期待はある.

より具体的には, 多変数 Meixner 多項式の満たす高階差分方程式 (特にそのスペクトル) を決定することである. 今回は多変数 Laguerre 多項式の二階微分方程式を, "母函数の母函数" で読み替えて多変数 Meixner 多項式の二階差分方程式を得たのであった. 多変数 Laguerre 多項式に関しては, それらが満たす同時可換な高階微分作用素の族 (及びその微分作用素の族を構成するための代数) は既に知られているので, それを "母函数の母函数" で多変数 Meixner 多項式に読み替えれば, 高階の差分方程式を得られる, と期待される. これに成功すれば, $d>0$ の場合の多変数 Meixner 多項式を, 量子可積分系に関連した多くの多変数直交多項式系と同様に, その同時可換な高階差分作用素の同時固有函数として特徴付けられるであろう.

3.2 群論的描像の解明

上記では $d>0$ への拡張を述べたが, それは多変数 Meixner 多項式他の重複度 d に寄らない「代数的描像の解明」ともいうべき問題であった. だがそれとは逆に, 条件 (2.1) のような

制約の下の, 重複度dに依存した幾何的, ないしは「群論的描像の解明」も併せて考えるべき問題であろう. 実際, 一変数の場合にはMeixner多項式他については, 様々な群やその表現の行列要素あるいは球函数としての解釈が数多く知られている [VK1], [VK2]. 更に先程注意したAomoto-Gelfandの超幾何による多変数化については最近, そういった「群論的描像の解明」が進展している [GVZ], [GMVZ]. 我々の多変数化に関しても, 本稿でみてきたように非常に良い多変数化であることから, その背後にこうした幾何的, 群論的構造が存在することが強く示唆されるので, その解明は今後の大きな課題の一つである.

3.3 他の離散型直交多項式系の "母函数の母函数" による扱い

本稿のKeyとなるアイデアであった "母函数の母函数" は, Meixner多項式に限らず他の離散型の直交系に関しても有効である可能性がある[11]. 特にAskey図式で, Meixner多項式の上位に来るHahn多項式, 双対Hahn多項式, Racah多項式等（[KLS]参照）もその適切な "母函数の母函数" を取ることで, 従来よりも簡潔で見通しの良い扱いが得られ, Meixner多項式と同様の多変数化もできるかもしれない. 更には "母函数の母函数" により, （直交関係式が離散和で定義される）離散型と（直交関係式が積分で定義される）連続型の直交多項式系の間の対応が得られることから, 従来のAskey図式そのものを, このアイデアで見直すことにより, 整理, 簡略化できると期待される.

3.4 応用

通常の一変数のMeixner, Charlier, Krawtchouk多項式については, 組み合わせ論, 確率過程, 数理物理等で多くの応用が知られている（これらのreferenceについては, 例えば [GMVZ] のintroduction参照）. また近年ではAomoto-Gelfandの超幾何による多変数化についても, 特に多変数Krawtchouk多項式に関してそうした応用の研究が行われていることから [I1], [M], 我々の多変数化についても同様の研究は今後の課題であろう.

参考文献

[BF] T. H. Baker and P. J. Forrester: *The Calogero-Sutherland model and generalized classical polynomials*, Commun. Math. Phys., **188** (1997), 175–216.

[DG] P. Diaconis and R. Griffiths *An introduction to multivariate Krawtchouk polynomials and their applications*, arXiv:1309.0112 (2013).

[FK] J. Faraut and A. Koranyi: *Analysis on Symmetric Cones*, Clarendon Press, Oxford, 1994.

[11] より一般に直交系とは限らない, 離散変数の函数や多項式の族に対しても重要になると期待される.

[FW1] J. Faraut and M. Wakayama: *Hermitian symmetric spaces of tube type and multivariate Meixner-Pollaczek polynomials*, arXiv:0812.1292 (2008).

[GVZ] V. X. Genest, L. Vinet and A. Zhedanov: *The multivariate Krawtchouk polynomials as matrix elements of the rotation group representations on oscillator states*, J. Phys. A: Math. Theor., **46**, 505203 (2013)

[GMVZ] V. X. Genest, H. Miki, L. Vinet and A. Zhedanov: *The multivariate Meixner polynomials as matrix elements of* $SO(d,1)$ *representations on oscillator states*, arXiv:1310.6953 (2013).

[Gr1] R. C. Griffiths: *Orthogonal polynomials on the multinomial distribution*, Aus. J. Stat., **13**-1 (1971), 27–35.

[Gr2] R. C. Griffiths: *Orthogonal polynomials on the negative multinomial distribution*, J. Mult. Var. Anal., **5**-2 (1975), 271–277.

[H] L. Hua: *Harmonic analysis of functions of several complex variables in the classical domains*, Amer. Math. Soc., 1963.

[Il] P. Iliev: *Meixner polynomials in several variables satisfying bispectral difference equations*, Adv. Appl. Math., **49**-1 (2012), 15–23.

[KLS] R. Koekoek, P. A. Lesky and R. F. Swarttouw: *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q-analogues*, Springer-Verlag, 2010.

[M] Y. Mizukawa: Poker dice game and multivariate Krawtchouk polynomial 数理解析研究所講究録, **1870** (2013), 16–24.

[OO] A. Okounkov and G. Olshanski: *Shifted Jack polynomials, binomial formula, and applications*, Math. Res. Letters, **4** (1997), 69–78.

[Sh] G. Shibukawa: *Multivariate Meixner, Charlier and Krawtchouk polynomials* arXiv:1404.7491

[VK1] N. Ja. Vilenkin and A. U. Klimyk: *Representation of Lie Groups and Special Functions -Volume 1-*, Kluwer Academic Publishers, 1991.

[VK2] N. Ja. Vilenkin and A. U. Klimyk: *Representation of Lie Groups and Special Functions -Volume 2-*, Kluwer Academic Publishers, 1993.